

Qu'est-ce qu'un Modèle Mathématique? L'exemple des chaînes de Markov avec revenu pour modéliser le microcrédit.

FRANCINE ET MARC DIENER

Retraités du Laboratoire J.A. Dieudonné
Université Cote d'Azur

27 Juin 2024

La microfinance a pris son essor au Bangladesh **dans les années 1970**.

M. Yunus a eu le prix Nobel de la paix **en 2006**.

Plusieurs économistes l'ont étudiés (Stiglitz, Duflo, ...) mais très peu utilisent des mathématiques.

- Un article de G. Tedeschi **en 2002** "Here today, gone tomorrow: "Can dynamic incentives make microfinance more flexible?" dans le "Journal of Development Economics".
- Mathematical Models for Microlending (F. Diener, M. Diener, O. Khodr, P. Protter) à la conférence **2009** de la société Mathématique du Bangladesh.
- May microcredit lead to inclusion? (F. Diener, M. Diener, N. Dhib, D. Lessy) à SIFIN **en 2017**.

Un modèle mathématique pour formaliser les idées de Tedeschi

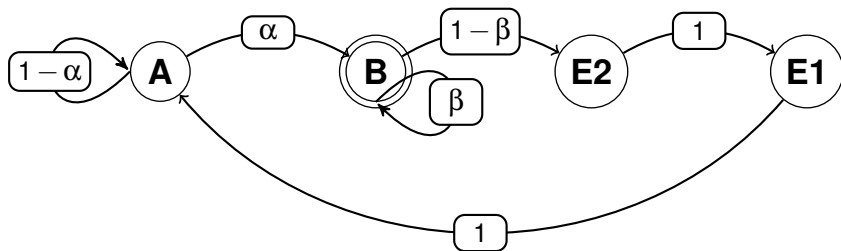
Idee de G. Tedeschi : Introduire dans les contrats de prêt que l'on modélise une **promesse de reconduction** du prêt en cas de remboursement et une **menace d'exclusion temporaire** du prêt en cas de non remboursement.

Dans le modèle mathématique, il faudra

- 1 **une dynamique** pour changer d'un état à un autre, demandeur, bénéficiaire, exclu, ...
- 2 une dynamique qui devra être **stochastique (c'est-à-dire aléatoire)**: à partir d'un état, on peut en atteindre plusieurs, avec différentes probabilités de les atteindre.
- 3 donc un modèle qui doit **rester aussi simple que possible** et néanmoins pertinent.

Un exemple de dynamique stochastique

Une **chaîne de Markov** à $T + 1$ états, $X_t \in S = \{B, E^T, E^{T-1}, \dots, E^1 = D\}$ où B est l'état de *bénéficiaire* d'un prêt, E^i , $i = 1, \dots, T$ l'état d'exclu du prêt pour i périodes et D l'état de *demandeur* d'un prêt.



Avec deux sources d'aléa, $P(X_{t+1} = B \mid X_t = A) = \alpha$, **probabilité d'accès au prêt** et $P(X_{t+1} = B \mid X_t = B) = \beta$, **probabilité de réussite de l'emprunteur**.

Revenu total espéré de l'emprunteur

La **fonction de revenu** $f(X_{t-1}, X_t)$ lorsqu'on passe de l'état X_{t-1} à l'état X_t donne la quantité gagnée au temps t pour 1 Euro emprunté au temps $t - 1$. Elle est nulle dans tous les cas, sauf lorsqu'on passe de B à B :

$$f(x, y) = \begin{cases} w - (1 + r) & \text{si } (x, y) = (B, B) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le **revenu total espéré** au temps $t = s$ est alors la somme de ces revenus actualisés

$$W_s(x) = E \left(\sum_{t=s+1}^{\infty} \delta^{t-s-1} f(X_{t-1}, X_t) / X_s = x \right)$$

où δ est un coefficient d'actualisation.

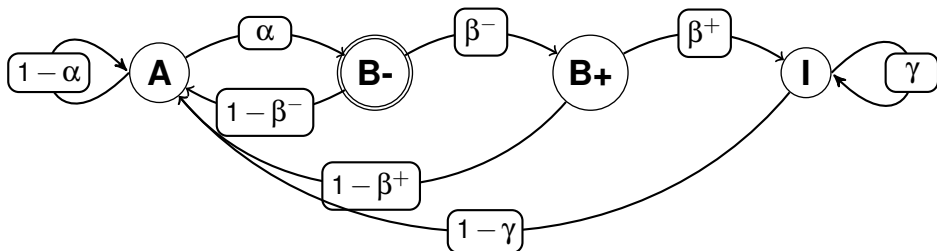
La condition d'**absence de défaut stratégique (ADS)** au temps $t = s$ s'écrit:

$$w - (1 + r) + \delta W_s(B) \geq w + \delta W_s(E^T)$$

On peut examiner comment cette inégalité varie en fonction des différents paramètres du modèle. Par exemple si la probabilité α d'obtenir un prêt est trop importante où si le taux d'intérêt r trop élevé, il se peut qu'il soit préférable pour un emprunteur rationnel de faire défaut plutôt que de rembourser lorsqu'il a réussi.

Modèle de Dhib-Lessi

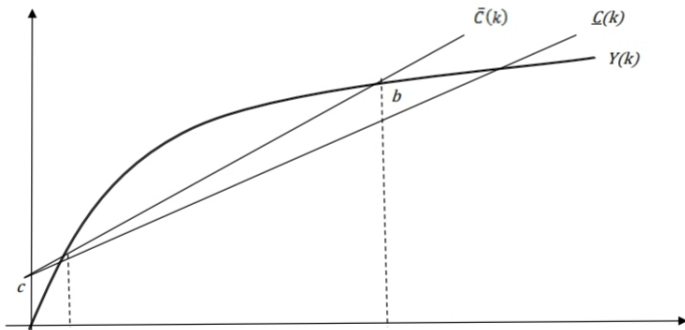
C'est encore une chaîne de Markov à 4 états: demandeur **A**, bénéficiaire d'un petit microcrédit **B-**, bénéficiaire d'un grand microcrédit **B+** et inclu **I**.
Quatre probabilités, et une fonction de revenu.



La fonction de revenu

Pour simplifier le modèle, on suppose que:

- la fonction de revenu est nulle lorsqu'on réussit avec un petit microcrédit $k-$ et aussi lorsqu'on réussit avec un grand microcrédit $k+$ (car les revenus net équilibrent juste les coûts).
- on passe d'un état à un autre avec un revenu net nul sauf si l'on reste inclu (et détenteur d'un prêt conventionnel (à un taux plus bas que celui des micro crédits)).



Exemple de discussion dans ce modèle

Les trois inégalités d'ADS sont plus complexes que dans le modèle précédent mais aussi plus instructives.

L'IMF cherchera à maximiser les paramètres α (en accordant le maximum de prêts) ainsi que les paramètres de réussite β^- et β^+ (en aidant les emprunteurs dans leurs entreprises) mais, on n'est pas surpris de voir apparaître des **bornes supérieures** à ne pas franchir si l'on veut que les inégalités d'ADS restent vraies.

On est par contre plus étonné de voir que les inégalités d'ADS pour les microcrédits conduisent à des **bornes inférieures** pour β^+ et γ , qui sont les taux de réussite des grands prêts, par l'IMF ou la banque. En fait on réalise qu'il faut qu'un emprunteur ait **suffisamment de chance de réussir** lorsqu'il aura un grand microcrédit et lorsqu'il sera inclu sinon, il peut avoir intérêt à rester dans le système du microcrédit (et à faire défaut!).

Utiliser des Modèles Mathématiques en Intervention Sociale?

- Les mathématiques ne sont pas seulement des méthodes de calcul mais aussi des "concepts pour penser avec".
- Les chercheurs non mathématiciens peuvent comprendre ces concepts sans nécessairement connaître tous les calculs sous-jacents.
- Encore faut-il que les mathématiciens acceptent de partager ces concepts en les dépouillant de leurs aspects les plus techniques
- Un groupe de chercheurs pluridisciplinaire c'est comme un groupe de musiciens de jazz, chacun est un expert de son instrument mais, pour produire ensemble de la musique, il faut que chacun connaisse le mieux possible les possibilités des autres.